Chapitre III

Optimum économique, équilibre général et théorie du bien-être

1. Optimum de Pareto

1.1 Définition des états optimaux

État, état possible, choix parmi ces états.

État :

m vecteurs de consommation x_i ;
n vecteurs de production nette y_j ;

État possible, réalisable

1) $x_i \in X_i$ $\quad i = 1, 2, \ldots, m$
2) $y_j \in P_j$ $\quad j = 1, 2, \ldots, n$
3) $\sum_{i=1}^{m} x_{ih} = \sum_{j=1}^{n} y_{jh} + w_h$ $\quad h=1, 2, \ldots, \ell$

Remarques :

1. dans 3), le signe «=» signifie que l'on fait l'hypothèse de la libre disposition des excédents ;
2. la définition d'un état possible est indépendante de toute organisation ou de tout contexte institutionnel. Elle ne fait appel qu'à des contraintes physiques ou techniques.
3. dans 3), w_h représentent les dotations initiales en bien h.

Le choix : 2 principes

1. le choix porte directement sur les vecteurs de consommation x_i ;, autrement dit, le choix entre deux états dépend seulement des x_i.
2. le choix entre deux états va provenir des préférences des consommateurs.

Un état est préférable à un autre s'il est préféré **par tous** les consommateurs.

Définition :

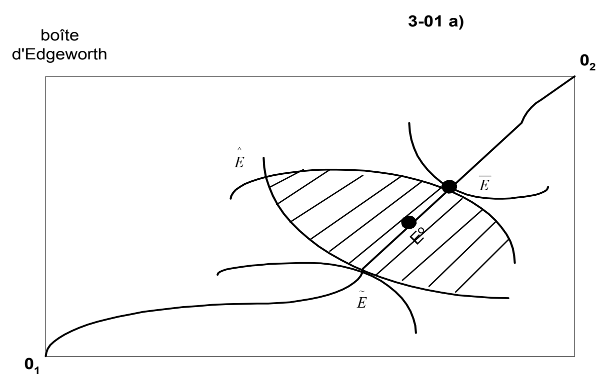
Un état E* est de «rendement social maximum» ou est un «optimum au sens de Pareto», s'il est possible et s'il n'existe pas un autre état E' possible, tel que

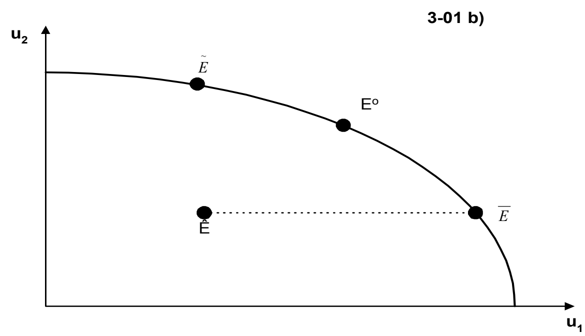
$$u_i(x_i') \geq u_i(x_i^*) \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, m$$

avec l'inégalité stricte pour au moins un i.

Autrement dit, E* est un optimum de Pareto s'il est possible et si, à partir de cet état, il n'est plus possible d'augmenter la satisfaction d'un individu sans diminuer celle d'un autre.

Représentation graphique : **(voir graphique 3-01 a) et b))**





Remarque : il existe une infinité

d'états qui sont des optimums de Pareto.

1.2 Caractérisation d'un optimum de distribution

Présentation du problème

- On se situe dans une économie sans production (i.e. la production est exogène et incluse dans les ressources initiales w_h) ;
- Dans un tel contexte, le problème revient à se demander comment on distribue les ressources initiales w_h entre les m consommateurs de façon à obtenir un optimum . Autrement dit, on cherche un état qui est possible et tel qu'il n'existe pas un autre état possible qui lui serait strictement préféré par au moins un consommateur.

Dans ce cas particulier, on cherche à caractériser :

a) un état : m vecteurs x_i

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1\ell}) \\ x_2 &= (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2\ell}) \\ &\vdots \\ x_m &= (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{m\ell}) \end{aligned}$$

b) un état possible : $\sum_{i=1} x_{ih} = w_h \qquad h = 1, 2, \ldots, \ell$

$x_i \in X_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$

pour le bien 1 : $x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = w_1$

pour le bien 2 : $x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = w_2$

pour le bien ℓ : $x_{1\ell} + x_{2\ell} + \ldots + x_{m\ell} = w\ell$

c) un état qui est un optimum

Représentation graphique :

Le contexte : 2 consommateurs, i = 1, 2

2 biens, h = 1, 2

Le problème : on cherche à distribuer $w = (w_1, w_2)$ de façon optimale, i.e. on cherche des vecteurs $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ et $x_2 = (x_{21}, x_{22})$

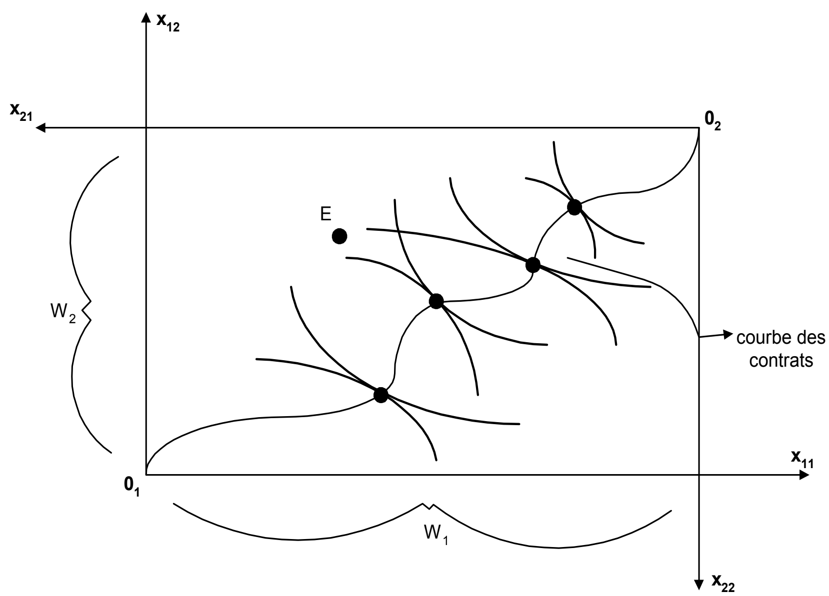
i) qui sont possibles $x_{11} + x_{21} = w_1$

$x_{12} + x_{22} = w_2$

et

ii) qui satisfont notre critère d'optimalité (**voir graphique 3-02**)

3-02



Tout point à l'intérieur de la boîte représente un état possible ou réalisable - Ex. E

Parmi tous ces points (états possibles), on cherche ceux qui répondent ou satisfont à notre critère d'optimalité, i.e. tous les points sur la courbe des contrats.

Comment se caractérisent les points sur la courbe des contrats ?

Formulation du problème

Note : le contexte ou l'économie considérée est encore 2 consommateurs et 2 biens

«Idéalement», le problème devrait s'écrire comme suit :

$$\underset{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}}{Max} \quad [u_1(x_{11}, x_{12}), u_2(x_{21}, x_{22})]$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{aligned} & x_{11} + x_{21} = w_1 \\ & x_{12} + x_{22} = w_2 \\ & (x_{11}, x_{12}) \in X_1 \\ & (x_{21}, x_{22}) \in X_2 \end{aligned}$$

Toutefois, ceci n'est pas possible mathématiquement car on ne peut maximiser un vecteur :

Ex. $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ peut être comparé à $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, mais

$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ne peut être comparé à $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

On contourne ce problème «technique» en maximisant l'utilité d'un individu (choisi arbitrairement) sous contrainte d'un niveau donné d'utilité pour l'autre individu. On écrit alors :

$$\max_{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}} \quad u_1(x_{11}, x_{12})$$

$$\text{s.c.} \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = \overline{u}_2$$

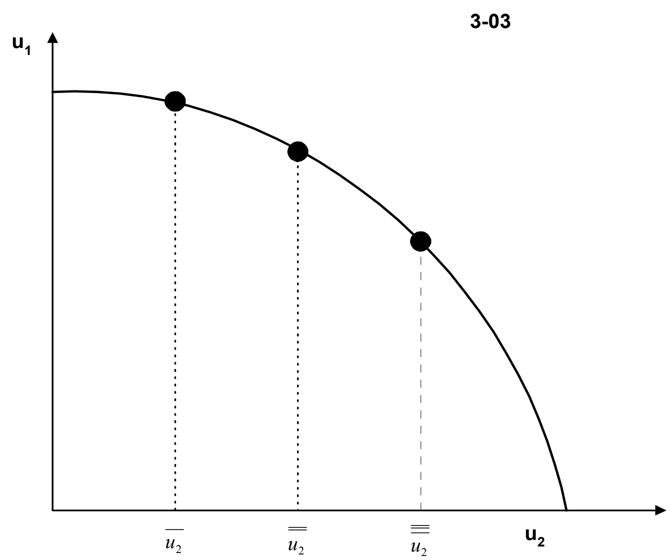
$$x_{11} + x_{21} = w_1$$

$$x_{12} + x_{22} = w_2$$

$$(x_{11}, x_{21}) \in X_1$$

$$(x_{21}, x_{22}) \in X_2$$

(**voir graphique 3-03**)



Ceci revient à maximiser le lagrangien suivant :

$$\max_{\substack{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \\ \lambda, \pi_1, \pi_2}} \quad L = u_1(x_{11}, x_{12}) + \lambda[u_2(x_{21}, x_{22}) - \overline{u}_2] - \pi_1(x_{11} + x_{21} - w_1) - \pi_2(x_{12} + x_{22} - w_2)$$

En résolvant, on obtient :

1. $\dfrac{\partial L}{\partial x_{11}} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{11}} - \pi_1 = 0$

2. $\dfrac{\partial L}{\partial x_{12}} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_{12}} - \pi_2 = 0$

3. $\dfrac{\partial L}{\partial x_{21}} = \lambda \dfrac{\partial u_2}{\partial x_{21}} - \pi_1 = 0$

4. $\dfrac{\partial L}{\partial x_{22}} = \lambda \dfrac{\partial u_2}{\partial x_{22}} - \pi_2 = 0$

5. $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = u_2\left(x_{21}, x_{22}\right) - \overline{u}_2 = 0$

6. $\dfrac{\partial L}{\partial \pi_1} = -\left(x_{11} + x_{21} - w_1\right) = 0$

7. $\dfrac{\partial L}{\partial \pi_2} = -\left(x_{12} + x_{22} - w_2\right) = 0$

On a 7 équations, 7 inconnus (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, λ, π_1, π_2)

De (1) et (2), on a : $\dfrac{\partial u_1 / \partial x_{11}}{\partial u_1 / \partial x_{12}} = \dfrac{\pi_1}{\pi_2}$ (*)

De (2) et (3), on a : $\dfrac{\partial u_2 / \partial x_{21}}{\partial u_2 / \partial x_{22}} = \dfrac{\pi_1}{\pi_2}$ (**)

De (*) et (**) : $\dfrac{\partial u_1 / \partial x_{11}}{\partial u_1 / \partial x_{12}} = \dfrac{\partial u_2 / \partial x_{21}}{\partial u_2 / \partial x_{22}}$ (8)

Nos conditions se réduisent à 4 équations (5), (6), (7) et (8) et 4 inconnus x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}.

Remarques :

1. Pour une valeur donnée de $\overline{u}_2$, on obtient une valeur précise pour x_{11}^*, x_{12}^*, x_{21}^* et x_{22}^* et donc pour u_1^* (i.e. un point sur la frontière de bien-être.)

   Par contre, si on fait varier $\overline{u}_2$ comme un paramètre, on engendre toute la frontière de bien-être.

2. Interprétation des multiplicateurs π_1, π_2.

   $\pi_h = \dfrac{\partial u_1\left(x_{11}^*, x_{12}^*\right)}{\partial w_h}$ h=1, 2

- la dimension de π_h est celle d'une utilité marginale.
- C'est l'utilité marginale de l'individu 1 à l'optimum ; mais comme l'individu 1 est contraint par les autres (ici, l'individu 2), par abus de langage, on appelle π_h «l'utilité marginale sociale du bien h».

3. Pourquoi la condition $\dfrac{\partial u_1 / \partial x_{11}}{\partial u_1 / \partial x_{12}} = \dfrac{\partial u_2 / \partial x_{21}}{\partial u_2 / \partial x_{22}}$ nous assure-t-elle qu'on a un optimum ?

   On peut facilement montrer que si, par exemple, $TMS_{1,2}^1 > TMS_{1,2}^2$, alors on peut augmenter l'utilité des deux individus en procédant à une réallocation des deux biens entre les deux individus.

4. Dans le cas d'une économie sans production avec m consommateurs et ℓ biens, l'optimum se caractérise par :

$$TMS_{r,s}^i = TMS_{r,s}^j$$

   pour tous les couples de biens (r, s) et tous les couples d'agents (i, j).

<u>Exemple 1</u> (Optimum de distribution)

Une allocation est optimale, au sens de Pareto, s'il est impossible d'augmenter l'utilité d'un consommateur sans diminuer celle d'un autre. Une façon de trouver un optimum de Pareto est de maximiser l'utilité d'un des consommateur sous contrainte que l'utilité de l'autre reste inchangée (dans une économie qui comporte deux consommateurs).

Le problème s'écrit :

$$\text{Max} \quad u_1(x_{11}, x_{12}) \quad \text{sous contrainte que} \quad \begin{aligned} u_2(x_{21}, x_{22}) &= \overline{u}_2 \\ x_{11} + x_{21} &= w_1 \\ x_{12} + x_{22} &= w_2 \end{aligned}$$

Soit $u_1 = x_{11}^{1/2} x_{12}^{1/2}$ et $u_2 = x_{21}^{1/2} x_{22}^{1/2}$, avec $w_1 = 128$ et $w_2 = 32$

Quelle serait la distribution optimale en supposant que l'on fixe l'utilité du deuxième consommateur à $\overline{u}_2 = 48$?

On doit maximiser le lagrangien :

$$\underset{\substack{x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}\\ \lambda,\pi_1,\pi_2}}{Max} \quad L: x_{11}^{1/2}x_{12}^{1/2} + \lambda\left(x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2} - 48\right) - \pi_1\left(x_{11} + x_{21} - 128\right) - \pi_2\left(x_{12} + x_{22} - 32\right)$$

Les conditions de premier ordre sont :

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x_{11}} = \dfrac{1}{2} x_{11}^{-1/2} x_{12}^{1/2} - \pi_1 = 0$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial x_{12}} = \dfrac{1}{2} x_{11}^{1/2} x_{12}^{-1/2} - \pi_2 = 0$

3) $\dfrac{\partial L}{\partial x_{21}} = \dfrac{\lambda}{2} x_{21}^{-1/2} x_{22}^{1/2} - \pi_1 = 0$

4) $\dfrac{\partial L}{\partial x_{22}} = \dfrac{\lambda}{2} x_{21}^{1/2} x_{22}^{-1/2} - \pi_2 = 0$

5) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_{21}^{1/2} x_{22}^{1/2} - 48 = 0$

6) $\dfrac{\partial L}{\partial \pi_1} = x_{11} + x_{21} - 128 = 0$

7) $\dfrac{\partial L}{\partial \pi_2} = x_{12} + x_{22} - 32 = 0$

De (1) et (2), on tire : $x_{12} / x_{11} = \pi_1 / \pi_2$ $\quad (-TMS_{12}^1 = \pi_1 / \pi_2)$

De (3) et (4), on tire : $x_{22} / x_{21} = \pi_1 / \pi_2$ $\quad (-TMS_{12}^2 = \pi_1 / \pi_2)$

Donc : $\quad x_{22} / x_{21} = x_{12} / x_{11} = \pi_1 / \pi_2 \quad (-TMS_{12}^1 = -TMS_{12}^2)$ $\quad$ (8)

De (6), on obtient $\quad x_{11} = 128 - x_{21}$

De (7), on obtient $\quad x_{12} = 32 - x_{22}$

En substituant dans (8), on aura $\quad x_{22} / x_{21} = (32 - x_{22}) / (128 - x_{21})$

$\Rightarrow \quad 128x_{22} - x_{22}x_{21} = 32x_{21} - x_{22}x_{21}$

$128\ x_{22} = 32\ x_{21}$

$4\ x_{22} = x_{21}$

De (5), on a : $x_{21}^{½} x_{22}^{½} = 48$

$\Rightarrow \quad (4x_{22})^{½}\ x_{22}^{½} = 48$

$2x_{22} = 48$

$x_{22} = 24$

Il ne reste plus qu'à déterminer x_{22}, x_{11} et x_{12} :

$x_{21} = 4x_{22} \quad \Rightarrow \quad x_{21} = 4 * 24 = 96$

$x_{11} = 128 - x_{21} \quad \Rightarrow \quad x_{11} = 128 - 96 = 32$

$x_{12} = 32 - x_{22} \quad \Rightarrow \quad x_{12} = 32 - 24 = 8$

L'état E_o : $x_{11} = 32$, $x_{12} = 8$, $x_{21} = 96$, $x_{22} = 24$, est un état optimal. En E_o, $u_1 = 16$ et $u_2 = 48$.

Soit l'état E_1 : $x_{11} = 64$, $x_{12} = 28$, $x_{21} = 64$, $x_{22} = 4$.

E_1 est un état réalisable, puisque

$x_{11} + x_{21} = 64 + 64 = 128 = w_1$

et

$x_{12} + x_{22} = 28 + 4 = 32 = w_2$

Cependant, E_1 n'est pas un état optimal puisqu'en E_1, $TMS_{12}^1 \neq TMS_{12}^2$.

En effet, $\left|TMS_{12}^1\right| = \dfrac{x_{12}}{x_{11}} = \dfrac{28}{64} = 0{,}4375 \quad \neq \quad \left|TMS_{12}^2\right| = \dfrac{x_{22}}{x_{21}} = \dfrac{4}{64} = 0{,}0625$

En E_1, $u_1 = 42{,}33$ et $u_2 = 16$.

Puisque E_1 n'est pas un état optimal, les consommateurs peuvent gagner à l'échange de manière à ce que l'utilité d'un des consommateurs augmente sans que celle de l'autre ne diminue. Fixons l'utilité du deuxième consommateur à $\bar{u}_2 = 16$.

À l'optimum, on doit avoir $x_{21} = 4x_{22}$

d'où $u_2 = x_{21}^{½}x_{22}^{½} = (4x_{22})^{½}x_{22}^{½} = 2x_{22} = 16$

$\Rightarrow \quad x_{22} = 8$

et $\quad x_{21} = 4x_{22} = 32 \qquad x_{11} = 128n - x_{21} = 96 \qquad x_{12} = 32 - x_{22} = 24$

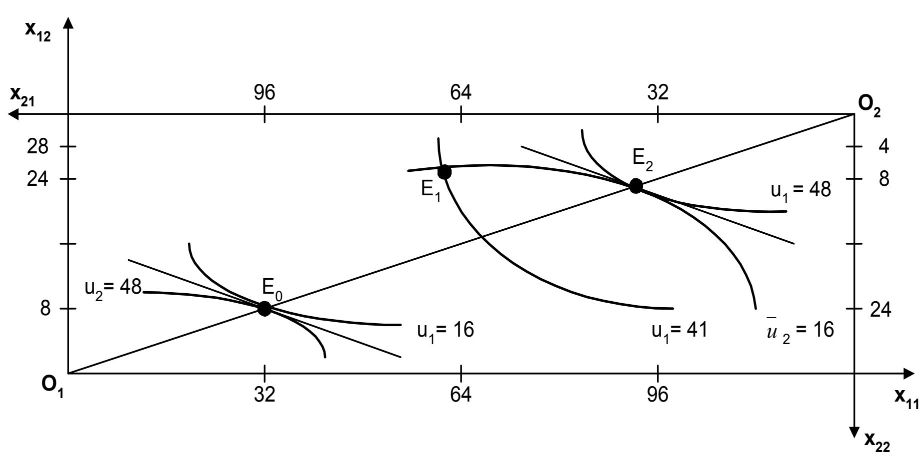
On a trouvé une nouvelle distribution :

E_2 : $x_{11} = 96$, $x_{12} = 24$, $x_{21} = 32$, $x_{22} = 8$, où l'utilité du premier consommateur a augmenté ($u_1' = 48 > 42{,}33 = u_1$) alors que celle du deuxième consommateur n'a pas changé ($u_2' = \overline{u}_2 = 16$). E_2 est un état optimal au sens de Pareto.

Ces états peuvent être illustrés graphiquement à l'intérieur d'une boîte d'Edgeworth :

(**voir graphique 3-04**)

3-04



2. Équilibre général dans une économie d'échange (sans production)

L'étude de l'équilibre général a deux objets :

1. Étudier les conditions qui permettent la cohérence des décisions prises par les agents de façon individuelle ou indépendamment .

2. La détermination des prix :
    - prix : exogènes dans la théorie du consommateur et du producteur ;
    - prix : variables endogènes dans l'étude de l'équilibre général.

Cette seconde partie devrait aboutir à une théorie des prix ou «théorie de la valeur» et nous permettre de répondre à la question : quels sont les facteurs qui déterminent les prix ?

Nous allons brièvement étudier ces deux questions dans un cadre théorique particulier qui est celui de la concurrence pure et parfaite.

Remarques :

1. L'équilibre général ne correspond pas nécessairement à la concurrence pure et parfaite. Ex. : la rationnement peut aussi mener à la compatibilité des décisions des agents.
2. La concurrence pure et parfaite est une représentation limitative de l'organisation sociale et des comportements individuels puisqu'elle néglige la concurrence imparfaite et qu'elle porte sur une économie sans monnaie et sans sous-emploi. Elle explique donc la cohérence de façon imparfaite, **mais** c'est un bon cadre de référence.

Rappel :

Hypothèses sous-jacentes à la concurrence pure et parfaite :
- le prix est le même pour tous les agents ;
- chaque agent considère ce prix comme indépendant de ses décisions ;

- chaque agent estime pouvoir céder ou acquérir à ce prix une quantité quelconque du bien.

2.1 Un équilibre de marché : l'équilibre walrassien

Définition d'un équilibre de marché

Un équilibre de marché est un état défini par :

1. des vecteurs de consommations x_i $(i = 1, \ldots, m)$
2. un vecteur de prix
3. des revenus R_i $(i = 1, \ldots, m)$

qui satisfait : $\sum_{i=1}^{m} x_{ih} = w_h$ $\quad h = 1, 2, \ldots, \ell$

dans lequel chaque consommateur maximise $u_i(x_i)$ sous contrainte que $px_i \leq R_i$ pour un p donné.

L'équilibre walrassien

On considère une économie de propriété privée dans laquelle les consommateurs sont propriétaires des ressources :

le consommateur 1 possède (w_{11}, w_{12})

le consommateur 2 possède (w_{21}, w_{22}).

Soit $p = (p_1, p_2)$ le système de prix annoncé aux deux consommateurs. Chaque consommateur connaît alors la valeur de son revenu :

$$R_i = p_1 w_{i1} + p_2 w_{i2} \qquad i = 1, 2$$

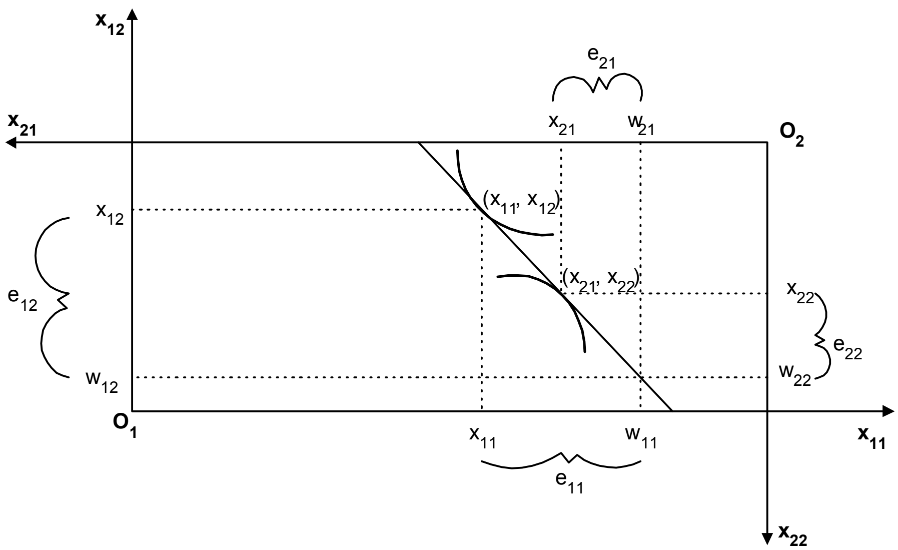
Chaque consommateur décide quelle quantité de biens il veut consommer à ces prix, i.e pour le consommateur i, on a :

$$x_{i1} = \xi_{i1}(p_1, p_2, p_1 w_{i1} + p_2 w_{i2}) \qquad \text{et} \qquad x_{i2} = \xi_{i2}(p_1, p_2, p_1 w_{i1} + p_2 w_{i2})$$

Note : la détermination de x_{i1} et x_{i2} vient de la résolution du problème de consommateur i.

(voir graphique 3-05)

3-05



On définit la **demande excédentaire** du consommateur i

pour le bien 1 : $e_{i1} = x_{i1} - w_{i1}$

pour le bien 2 : $e_{i2} = x_{i2} - w_{i2}$

Note : quand $e_{ih} > 0$, le consommateur achète le bien h ;

quand $e_{ih} < 0$, le consommateur vend le bien h.

Pour $p = (p_1, p_2)$ arbitraire, rien ne garantit que l'offre est égale à la demande. On peut avoir une situation de «déséquilibre». Un **équilibre** sera atteint lorsque :

$$e_{11} = - e_{21} \qquad \text{et} \qquad e_{12} = - e_{22}$$

2.2 Définition de l'équilibre

Soit $x_{ih} = \xi_{ih}(p_1, p_2, p_1 w_{i1} + p_2 w_{i2})$ la demande du consommateur i pour le bien h.

Un équilibre est un système de prix (p_1^*, p_2^*) tel que

(1) $\xi_1(p_1^*, p_2^*) = \xi_{11}(.) + \xi_{21}(.) = w_{11} + w_{21} = w_1$

(2) $\xi_2(p_1^*, p_2^*) = \xi_{12}(.) + \xi_{22}(.) = w_{12} + w_{22} = w_2$

où $\xi_h(p_1^*, p_2^*)$ est la demande agrégée pour le bien h et w_h est l'offre agrégée pour le bien h.

On peut aussi écrire (1) et (2) de la façon suivante :

(1') $[\xi_{11}(.) - w_{11}] + [\xi_{21}(.) - w_{21}] = 0$

$e_{11}(.) + e_{21}(.) = 0$

(2') $[\xi 12(.) - w_{12}] + [\xi_{22}(.) - w_{22}] = 0$

$e_{12}(.) + e_{22}(.) = 0$

ou encore : $z_1(p_1^*, p_2^*) = 0$

$z_2(p_1^*, p_2^*) = 0$

où $z_h(p_1, p_2)$ est la demande excédentaire (agrégée) pour le bien h.

$$z_h(p_1, p_2) = e_{1h}(.) + e_{2h}(.)$$

Remarque : Ceci est une définition «trop forte.»

2.3 La loi de Walras

Énoncé : *La somme des valeurs des demandes excédentaires est* ***identiquement*** *égale à zéro.*

i.e. $p_1 z_1(p_1, p_2) + p_2 z_2(p_1, p_2) \equiv 0$

Sources :

1. Chaque consommateur respecte sa contrainte budgétaire ;

2. Économie de propriété privée, i.e. :

$$R_i = p_1 w_{i1} + p_2 w_{i2} \qquad i = 1, 2$$

Pour le consommateur 1, on a :

1) $p_1\xi_{11}(p_1, p_2, R_1) + p_2\xi_{12}(p_1, p_2, R_1) \equiv R_1$

2) $R_1 = p_1 w_{11} + p_2 w_{12}$

$\Rightarrow$ $p_1\xi_{11}(p_1, p_2, p_1w_{11} + p_2w_{12}) + p_2\xi_{12}(p_1, p_2, p_1w_{11} + p_2w_{12}) = p_1w_{11} + p_2w_{12}$

$p_1[\xi_{11}(p_1, p_2, p_1w_{11} + p_2w_{12}) - w_{11}] + p_2[\xi_{12}(p_1, p_2, p_1w_{11} + p_2w_{12}) - w_{12}] \equiv 0$

3) $p_1e_{11} + p_2e_{12} \equiv 0$

De la même façon, on a, pour le consommateur 2 :

4) $p_1e_{21} + p_2e_{22} \equiv 0$

Ainsi, en sommant (3) et (4), on trouve :

$$p_1z_1(p_1, p_2) + p_2z_2(p_1, p_2) \equiv 0$$

Remarques :

1. La loi de Walras est satisfaite pour tous les prix (p_1, p_2), en particulier pour les prix d'équilibre (p_1^*, p_2^*) : $p_1z_1(p_1^*, p_2^*) + p_2z_2(p_1^*, p_2^*) = 0$
2. Si la loi de Walras est satisfaite, il suffit que le marché d'un bien soit en équilibre pour que l'autre le soit aussi.

2.4 La détermination des prix relatifs

Soit un équilibre, i.e. un système de prix p* tel que

$$z_h(p^*) = 0 \qquad h = 1, 2, \dots, \ell$$

La demande excédentaire $z_h(p)$ est une fonction homogène de degré 0 dans les prix. Ceci implique que si p* est en équilibre, alors λp^* est aussi en équilibre, i.e. $z_h(\lambda p^*) = 0$ $h = 1, 2, \ldots, \ell$

Donc, l'équilibre (offre agrégée = demande agrégée sur chaque marché ou demande excédentaire nulle pour tous les biens) ne peut déterminer que les **prix relatifs**.

2.5 Existence de l'équilibre

Exemple :

Soit deux consommateurs ayant les fonctions d'utilité suivantes :

$$U_1 = x_{11}^{1/2} x_{12}^{1/2} \quad , \quad U_2 = x_{21}^{1/3} x_{22}^{2/3}$$

On peut facilement calculer les fonctions de demande de chaque consommateur pour chacun des biens. On obtiendra :

$$\xi_{11} = \frac{R_1}{2p_1}, \quad \xi_{12} = \frac{R_1}{2p_2}, \quad \xi_{21} = \frac{R_2}{3p_1}, \quad \xi_{22} = \frac{2R_1}{3p_2}$$

Soit w_{ih} la dotation initiale en bien h du consommateur i. Les dotations initiales déterminent le revenu de chacun des consommateurs :

$R_1 = p_1w_{11} + p_2w_{12}$ et $R_2 = p_1w_{21} + p_2w_{22}$

La demande excédentaire agrégée pour le bien 1 est :

$$\begin{aligned} z_1(p_1, p_2) &= e_{11} + e_{21} \\ &= [\xi_{11}(p_1, p_2, R_1) - w_{11}] + [\xi_{21}(p_1, p_2, R_2) - w_{21}] \\ &= \left[\frac{p_1w_{11} + p_2w_{12}}{2p_1} - w_{11}\right] + \left[\frac{p_1w_{21} + p_2w_{22}}{3p_1} - w_{21}\right] \end{aligned}$$

La demande excédentaire agrégée pour le bien 2 est :

$$z_2(p_1, p_2) = \left[\frac{p_1w_{11} + p_2w_{12}}{2p_2} - w_{12}\right] + \left[\frac{2(p_1w_{21} + p_2w_{22})}{3p_2} - w_{22}\right]$$

1. Vérification de la loi de Walras :

$$p_1z_1(p_1, p_2) + p_2z_2(p_1, p_2) = 0$$

$$p_1\left[\frac{p_1w_{11}+p_2w_{12}}{2p_1}-w_{11}\right]+\left[\frac{p_1w_{21}+p_2w_{22}}{3p_1}-w_{21}\right]+$$

$$p_2\left[\frac{p_1w_{11}+p_2w_{12}}{2p_2}-w_{12}\right]+\left[\frac{2\left(p_1w_{21}+p_2w_{22}\right)}{3p_2}-w_{22}\right]=$$

$$(p_1w_{11}+p_2w_{12}) - p_1w_{11} - p_2w_{12} + (p_1w_{21} + p_2w_{22}) - p_1w_{21} - p_2w_{22} \;=\; \mathbf{0}$$

<u>Équilibre</u> : On cherche (p_1^*, p_2^*) tel que

$$z_1(p_1^*, p_2^*) = z_2(p_1^*, p_2^*) = 0$$

Posons $z_1(p_1^*, p_2^*) = 0$. Alors :

$$\left[\frac{p_1w_{11}+p_2w_{12}}{2p_1}-w_{11}\right]+\left[\frac{p_1w_{21}+p_2w_{22}}{3p_1}-w_{21}\right]=0$$

$$\frac{-p_1w_{11}+p_2w_{12}}{2p_1}=\frac{2p_1w_{21}-p_2w_{22}}{3p_1}$$

$$p_2(3w_{12} + 2w_{22}) = p_1(4w_{21} + 3w_{11})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{p_2^*}{p_1^*}=\frac{4w_{21}+3w_{11}}{3w_{12}+2w_{22}}$$

Posons $w_{11} = 10$, $w_{12} = 5$, $w_{21} = 15$ et $w_{22} = 15$. On obtient :

$$\frac{p_2^*}{p_1^*}=2$$

Exercice : vous arriverez au même résultat en posant $z_2(p_1, p_2) = 0$.

2.6 <u>L'équilibre général dans une économie avec production</u>

L'analyse de l'équilibre général faite dans le cadre d'une économie d'échanges s'applique, moyennant quelques modifications. Pour rendre les choses plus simples, nous allons, de plus, nous situer dans une économie avec deux consommateurs, deux entreprises et deux biens.

<u>Définition d'un équilibre de marché</u>

Un équilibre de marché est un état défini par :

1. deux vecteurs de consommations x_i $(i = 1, 2)$
2. deux vecteurs de production nette y_j $(j = 1, 2)$
3. un vecteur de prix
4. des revenus R_i $(i = 1, 2)$

qui satisfait : $$\sum_{i=1}^{2} x_{ih} = \sum_{j=1}^{2} y_{jh} + w_h \qquad h = 1, 2$$

dans lequel, pour un système de prix donné,

- chaque consommateur maximise $u_i(x_i)$ sous contrainte que $px_i \leq R_i$
- chaque producteur maximise py_j sous contrainte que $f_j(y_j) \leq 0$

L'équilibre walrassien

Aux prix $p=(p_1, p_2)$, chaque producteur décide de la quantité de biens qu'il veut «offrir», i.e. pour chaque entreprise j $(j = 1, 2)$, on a les fonctions d'offre nette :

$$y_{j1} = s_{j1}(p_1, p_2)$$
$$y_{j2} = s_{j2}(p_1, p_2)$$

Note : La détermination de y_{j1} et y_{j2} vient de la résolution du problème du producteur j.

Le profit de l'entreprise j sera :

$$\pi_j = p_1 y_{j1} + p_2 y_{j2}$$

Le revenu du consommateur i devient :

$$R_i = p_1 w_{i1} + p_2 w_{i2} + \theta_{i1}\pi_1 + \theta_{i2}\pi_2$$

où θ_{ij} représente la part du consommateur i dans l'entreprise j (les consommateurs sont propriétaires de toutes les ressources et de toutes les entreprises).

et $$\sum_{i=1}^{2} \theta_{ij} = 1$$

La demande excédentaire pour le bien h :

$$z_h(p_1, p_2) = \xi_{1h}(.) + \xi_{2h}(.) - y_{1h}(.) - y_{2h}(.) - w_{1h} - w_{2h}$$

À l'équilibre, on aura : $\underbrace{\xi_{11} + \xi_{21}}_{\text{demande agrégée (bien1)}} = \underbrace{s_{11} + s_{21} + w_1}_{\text{offre agrégée (bien 1)}}$

Exemple d'un équilibre walrassien dans une économie avec production

Soit une économie où l'utilité des consommateurs est représentable par :

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2(x_3 + 24)$$

et la technologie du producteur par :

$$y_1^{10/3} + y_2^{10/3} + \frac{40}{4}^{10/3} y_3 \leq 0$$

Les biens 1 et 2 sont les biens de consommation et le bien 3 est le travail.

Supposons que les dotations initiales sont $w = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

Le revenu du consommateur est $R = \sum_{h=1}^{3} p_h w_w + \pi$ où π représente les profits de l'entreprise : $(\pi = p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)$.

On veut déterminer l'équilibre, c'est-à-dire le système de prix auquel la demande agrégée est égale à l'offre agrégée pour chaque bien.

Fonctions de demande du consommateur :

Le consommateur désire maximiser son utilité compte tenu de sa contrainte budgétaire :

$$\underset{x_1,x_2,x_3}{Max} \; L : x_1x_2(x_3 + 24) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 - R)$$

(1) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2\left(x_3 + 24\right) - \lambda p_1 = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1\left(x_3 + 24\right) - \lambda p_2 = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial x_3} = x_1 x_2 - \lambda p_3 = 0$$

(4) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 + R = 0$$

De (1) et (2), on obtient : $x_1 = (x_3 + 24)\, p_3 / p_1$ (5)

De (2) et (3), on obtient : $x_2 = (x_3 + 24)\, p_3 / p_2$ (6)

En substituant dans (4) :

$$p_1\left(\left(x_3 + 24\right)\frac{p_3}{p_1}\right) + p_2\left(\left(x_3 + 24\right)\frac{p_3}{p_2}\right) + p_3 x_3 = R$$

$3p_3x_3 + 48p_3 = R \Rightarrow x_3 = R - 48p_3 / 3p_3$ (7)

En substituant (7) dans (5), on a : $x_1 = R + 24p_3 / 3p_1$

et en substituant (7) dans (6), on a : $x_2 = R + 24p_3 / 3p_2$

D'autre part, l'entreprise veut maximiser ses profits compte tenu de sa contrainte de production :

$$\underset{y_1, y_2, y_3}{Max} \quad L : p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 - \mu[\, y_1^{10/3} + y_2^{10/3} + \frac{40^{10/3}}{4} y_3 \,]$$

(1) $$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1 - \frac{10}{3}\mu y_1^{7/3} = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial y_2} = p_2 - \frac{10}{3}\mu y_2^{7/3} = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial y_3} = p_3 - \frac{40^{10/3}}{4}\mu = 0$$

(4) $$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -y_1^{10/3} - y_2^{10/3} - \frac{40^{10/3}}{4} y_3 = 0$$

De (3), on a : $\mu = 4p_3 / 40^{10/3}$

On substitue dans (1) : $$p_1 - \frac{10}{3}\frac{4p_3}{40^{10/3}} y_1^{7/3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 40\,(3p_1 / p_3)^{3/7} \qquad (5)$$

La même substitution dans (2) donne $y_2 = 40\,(3p_2 / p_3)^{3/7}$ (6)

Il suffit alors de substituer (5) et (6) dans (4) pour obtenir :

$$y_3 = -4\left(\frac{3p_1}{p_3}\right)^{10/7} - 4\left(\frac{3p_2}{p_3}\right)^{10/7}$$

On chercher les rapports des prix (p_2 / p_1) et (p_3/p_1) tels que :

$x_1 - y_1 - w_1 \equiv 0$

$x_2 - y_2 - w_2 \equiv 0$

$x_3 - y_3 - w_3 \equiv 0$

Or, $x_1 - y_1 - w_1 = \dfrac{R + 24p_3}{3p_1} - 40\left(\dfrac{3p_1}{p_3}\right)^{3/7} - 8$

Or, $x_2 - y_2 - w_2 = \dfrac{R + 24p_3}{3p_2} - 40\left(\dfrac{3p_2}{p_3}\right)^{3/7} - 8$

$x_1 - y_1 - w_1 \equiv 0$ et $x_2 - y_2 - w_2 \equiv 0$ impliquent

$$\frac{R + 24p_3}{3p_1} - 40\left(\frac{3p_1}{p_3}\right)^{3/7} - 8 = \frac{R + 24p_3}{3p_2} - 40\left(\frac{3p_2}{p_3}\right)^{3/7} - 8$$

ce qui est vrai si $p_1 = p_2$ (ou $p_2 / p_1 = 1$).

Posons $p_1 = 1$ pour faciliter les calculs. Alors $p_2 = 1$.

Le revenu du consommateur est alors :

$R = p_1w_1 + p_2w_2 + p_3w_3 + p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3$

$R = 1*8 + 1*8 + 0 + 1*40(3 / p_3)^{3/7} + 1*40(3 / p_3)^{3/7} + p_3[-4(3 / p_3)^{10/7} - 4(3 / p_3)^{10/7}]$

(car $w_1 = 8$, $w_2 = 8$, $w_3 = 0$, $p_1 = p_2 = 1$).

On a donc :

$R = 16 + 80(3 / p_3)^{3/7} - 8p_3(3 / p_3)^{10/7}$ (*)

D'autre part, si $p_1 = p_2 = 1$, alors

$y_2 = 40(3 / p_3)^{3/7}$

On aura donc :

$$x_2 - y_2 - w_2 = \frac{R + 24p_3}{3} - 40\left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7} - 8 = 0$$

En substituant (*) dans l'équation, on obtient :

$$\frac{16}{3} + \frac{80}{3}\left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7} - \frac{8}{3}p_3\left(\frac{3}{p_3}\right)^{10/7} + 8p_3 - 40\left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7} - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{8}{3}p_3\left(\frac{3}{p_3}\right)^{10/7} - \frac{40}{3}\left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7} = \frac{8}{3} - 8p_3$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7}\left[-\frac{40}{3} - \frac{8}{3}p_3\left(\frac{3}{p_3}\right)\right] = \frac{8 - 24p_3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7}\left[-\frac{64}{3}\right] = \frac{8 - 24p_3}{3}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{3}{p_3}\right)^{3/7} = \frac{24\,p_3 - 8}{64}$$

qui a pour solution $p_3 = 3$.

$$p^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ est donc un équilibre walrassien.

Avec ce système de prix, on obtient :

- les quantités offertes par l'entreprise, $y_1 = 40$, $y_2 = 40$, $y_3 = -8$;
- les profits de l'entreprise : $\pi = p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 = 40 + 40 + 3*-8 = 56$;
- le revenu du consommateur : $R = p_1w_1 + p_2w_2 + \pi = 8 + 8 + 56 = 72$;
- les quantités demandées : $x_1 = 48$, $x_2 = 48$, $x_3 = -8$.

On vérifie facilement que les fonctions de demande excédentaire sont nulles pour tous les biens :

$x_1 - y_1 - w_1 = 48 - 40 - 8 = 0$

$x_2 - y_2 - w_2 = 48 - 40 - 8 = 0$

$x_3 - y_3 - w_3 = -8 - (-8) = 0$

Pour trouver l'équilibre, on a utilité seulement les deux premières équations de demande excédentaire, soit celle des biens 1 et 2. En fait, on aurait pu utiliser n'importe quelle combinaison de deux des trois équations pour arriver au même résultat. C'est la résolution d'un système de deux équations (deux fonctions de demande excédentaire) à deux inconnus (p_2 / p_1) et (p_3 / p_1). De toute manière, on ne peut que trouver une solution pour le rapport des prix (prix relatifs) ; il est impossible de trouver une solution pour les prix absolus (p_1, p_2 et p_3), même si on a trois équations, parce que l'une des équations est le résultat des deux autres (i.e. si deux des trois marchés sont en équilibre, le troisième l'est forcément parce que les trois sont liés entre eux par la loi de Walras).

La solution est donc $p_2 / p_1 = 1$ et $p_3 / p_1 = 3$ et le système de prix

$$p^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

n'est qu'une de ses formulations.

Par exemple, on peut vérifier que $p^{**} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$ assure aussi l'équilibre sur tous les marchés :

avec ce système de prix, on obtient que :

- les quantités offertes par l'entreprise, $y_1 = 40$, $y_2 = 40$, $y_3 = -8$;
- les profits de l'entreprise : $\pi = p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 = 0,5*40 + 0,5*40 + 1,5*-8 = 28$;
- le revenu du consommateur : $R = p_1w_1 + p_2w_2 + \pi = 0,5*8 + 0,5*8 + 28 = 36$;
- les quantités demandées : $x_1 = 48$, $x_2 = 48$, $x_3 = -8$.

Les quantités offertes et demandées sont les mêmes pour p* et p**, ce qui est normal puisque les fonctions de demande et d'offre sont homogènes de degré 0 dans les prix.

2.7. Théorie des prix ou «théorie de la valeur».

Quels sont les facteurs qui déterminent les prix dans une économie d'échanges ?

1. La rareté (plus ou moins grande) des différents biens, i.e. les quantités w_h .
2. L'utilité (plus ou moins grande) des biens ; c'est ce que déterminent les fonctions de demande ξ_{ih} .
3. La répartition des droits que les consommateurs possèdent vis-à-vis des ressources collectives, ressources initiales, i.e. les w_{ih} (ou les R_i).

L'étude de l'influence de ces facteurs mène aux trois résultats généraux suivants :

- p_h, le prix du bien h, augmentera si ce bien devient plus rare ;
- p_h, le prix du bien h, augmentera si ce bien devient plus utile ;
- p_h, le prix du bien h, augmentera si la propension marginale à consommer du bien h est élevée de la part des gens qui sont favorisés par la nouvelle répartition des w_{ih}.

Remarque :

Dans une économie avec production, la détermination des prix est aussi liée aux conditions techniques de la production.

Si les prix dépendent seulement des conditions techniques, alors on a la «théorie de la valeur-travail.»

3. OPTIMALITÉ DES ÉQUILIBRES DE MARCHÉ

Les théorèmes fondamentaux de la théorie du bien-être

Théorème 1

Énoncé : Un équilibre de marché est un optimum de Pareto.

Explication intuitive : Les prix sont des signaux suffisants pour coordonner les activité économiques décentralisées de façon «satisfaisante» au sens du critère de Pareto.

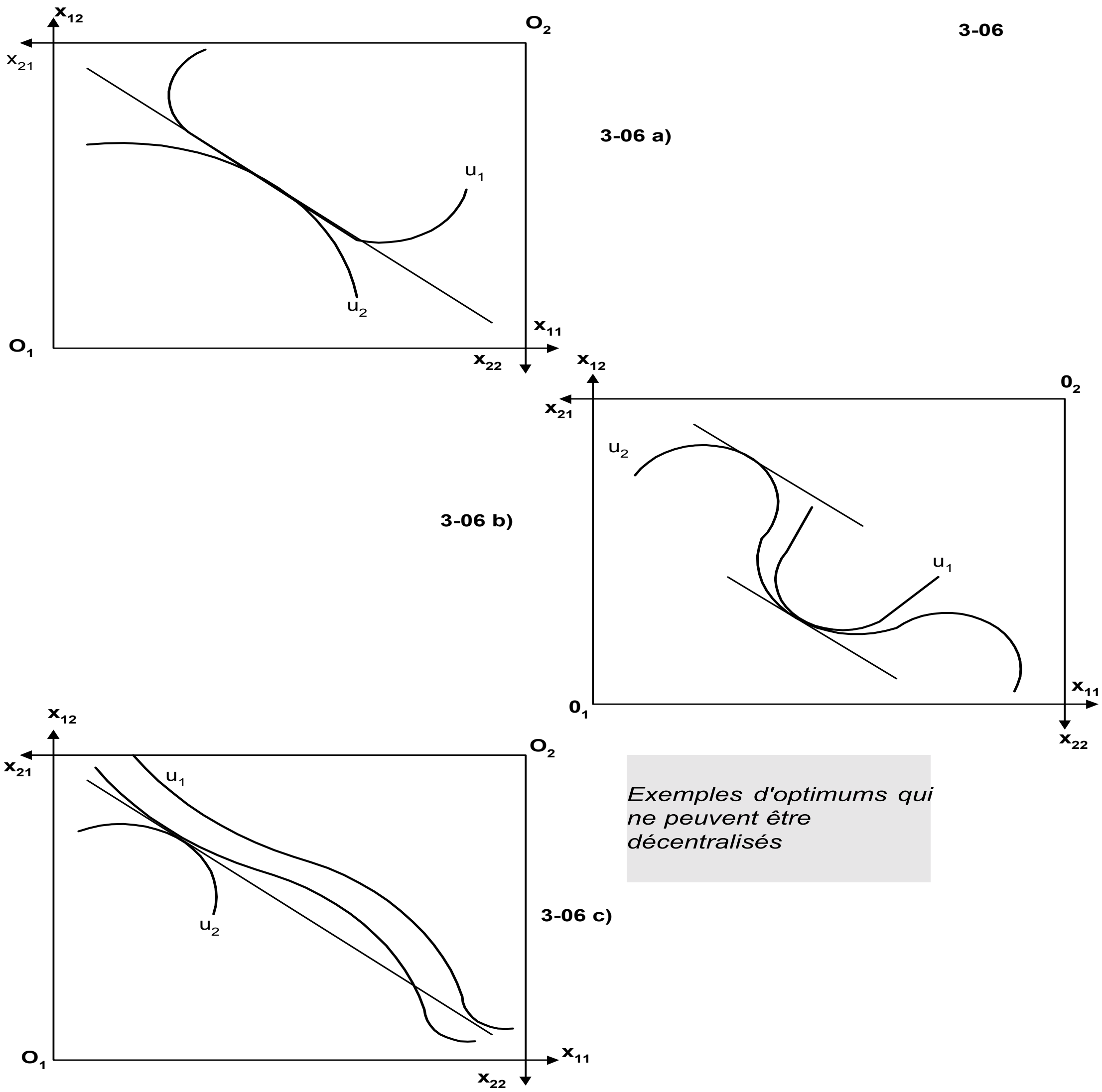
Théorème 2

Énoncé : Un optimum de Pareto est un équilibre de marché.

Explication intuitive : L'optimum peut être décentralisé. On peut trouver un système de prix p^* et des revenus R_i ($i = 1, 2, \dots, m$) tels que chaque consommateur maximisant son utilité (à ce système de prix donné) choisissent respectivement les vecteurs x_i^* qui correspondent à l'optimum.

Remarque : D'un point de vue purement technique, le théorème 2 est plus difficile à réaliser (i.e. exige des conditions plus restrictives). L'hypothèse essentielle est la convexité des préférences (fonctions d'utilité quasi-concave).

(voir graphiques 3-06 a), b) et c))



4. L'OPTIMALITÉ ET LA FONCTION D'UTILITÉ SOCIALE

Dans la section 1, théorie de l'optimum de Pareto, nous avons cherché à caractériser les points qui appartiennent à la frontière de bien-être ou frontière de Pareto. En effet, nous avons étudié les conditions qu'un état E de l'économie doit satisfaire pour être considéré comme un état optimal au sens de Pareto. De cette étude, nous avons pu constater qu'il n'y avait pas qu'un seul état qui remplissait ces conditions mais, qu'au contraire, les états de rendement social maximum étaient très nombreux.

Cette façon de faire correspond exactement à l'approche de Pareto. En effet, Pareto prétendait que la compétence normative de l'économiste se limite à caractériser la frontière de bien-être. Autrement dit, si on veut porter un jugement de valeur sur une situation quelconque, on se limite à vérifier si elle remplit ou non les critères parétiens. En aucun cas, toutefois, ces critères permettent de juger, entre deux situations qui les rempliraient, laquelle est la meilleure. Pareto se défendait de porter de tels jugements car, pour le faire, cela suppose que l'on puisse comparer les satisfactions individuelles. Or, selon lui, il n'existe pas de critère scientifique qui nous permettrait de juger entre deux situations efficaces.

Dans cette section, nous allons délaisser l'approche de Pareto (au sens strict du terme) et nous allons tenter de lever cette indétermination qui existe entre les différents états que nous avons déjà classés comme étant optimaux. Notre méthode devra respecter le principe suivant : si l'état E^1 est préféré à l'état E^2 d'après les critères parétiens, alors il devra encore lui être préféré d'après les critères de notre méthode. Suivant cette dernière, les états de l'économie seront classés à partir des valeurs qu'ils donnent à une <u>fonction de bien-être social</u> ou <u>fonction d'utilité collective</u>.

4.1 <u>La fonction de bien-être social</u>

<u>Définition</u> : Une fonction de bien-être social est une fonction numérique définie de la façon suivante :

$$W \equiv W(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$

où u_i est l'utilité du consommateur i. Ainsi, pour un état E de l'économie (i.e. une valeur pour chaque x_{ih}, y_{jh}), on peut calculer les valeurs prises par les utilités de chaque consommateur i, $u_i = u_i(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{i\ell})$, et par la suite la valeur correspondante de W.

$$W \equiv W(u_1, u_2, \ldots, u_m)$$
$$\equiv W(u_1(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1\ell}), u_2(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2\ell}), \ldots, u_m(x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{m\ell}))$$

Cette fonction établit donc une correspondance entre le bien-être social (W) et les satisfactions individuelles (u_i). On l'appelle souvent fonction de Bergson-Samuelson.

On suppose, en général, que W est une fonction différentiable. On suppose également $(\partial W/\partial u_i) > 0$: cette hypothèse nous assure qu'un état déjà classé optimal (d'après les critères parétiens) le soit encore d'après la fonction W.

L'existence d'une fonction de bien-être social

Comme nous allons le voir, admettre l'existence de la fonction W est «hardi». Ceci est dû, en gros, aux implications ou hypothèses sous-jacentes. Nous les regroupons ici en deux catégories.

1° L'existence de W suppose que chaque fonction d'utilité individuelle u_i soit définie de façon unique ou cardinale : on ne peut se contenter de fonctions ordinales, car autrement la fonction W ne serait pas bien définie. D'ailleurs, W ne sera pas invariable à une transformation d'un u_i.

Exemple

Considérons $u = x_1x_2$ et $u = \log(x_1) + \log(x_2)$. Ces deux fonctions d'utilité pourraient représenter les préférences d'un même consommateur puisqu'elles donnent les mêmes fonctions de demande, $x_1 = \xi_1(p_1, p_2, R)$ et $x_2 = \xi_2(p_1, p_2, R)$. Toutefois, on ne peut utiliser l'une ou l'autre pour définir W.

Soit un état E avec deux consommateurs tel que $x_{11} = 1$, $x_{12} = 1$, et $u_2 = 10$. Définissons $W = u_1 + u_2$.

a) si $u_1 = x_{11}x_{12}$, $W(u_1, u_2) = W(x_{11}x_{12}, 10) = 11$

b) si $u_1 = \log(x_1) + \log(x_2)$, $W(u_1, u_2) = W(\log(x_1) + \log(x_2), 10) = 10$

2° L'existence de W suppose qu'on établit un arbitrage entre les gains d'utilité des consommateurs.

Soit E^1 et E^2 deux états de l'économie. Chacun de ces états est classé par W qui leur attribue respectivement les valeurs W^1 et W^2. La différence d'évaluation entre ces deux états peut être approximée[1] par la différentielle de W :

$$W^2 - W^1 \approx dW = \partial W/\partial u_1 * du_1 + \partial W/\partial u_2 * du_2 + \ldots + \partial W/\partial u_m * du_m$$

Supposons maintenant que seuls les deux premiers consommateurs sont affectés par les changements entre les deux états (i.e. $du_i = 0$ pour $i \neq 1, 2$). La différentielle de W se réduit alors à :

$$dW = \partial W/\partial u_1 * du_1 + \partial W/\partial u_2 * du_2$$

Les deux consommateurs sont indifférents entre les deux états E^1 et E^2 si $dW = 0$, i.e.

si $0 = \partial W/\partial u_1 * du_1 + \partial W/\partial u_2 * du_2$, ou si $$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{\partial W / \partial u_1}{\partial W / \partial u_2}$$

L'existence de W revient donc à supposer, au niveau collectif, l'existence d'un taux marginal de substitution entre les utilités des individus. Autrement dit, cela suppose que l'on soit capable de comparer des utilités individuelles.

Puisque W est, en général, différentiable, elle nous permet de définir des courbes d'indifférence sociale dont la pente sera ce TMS «social».

[1] Cette approximation sera d'autant meilleure que les deux états seront «près» ou semblables.

Bref, on est loin de l'approche de Pareto (au sens strict) selon laquelle les choix sont basés uniquement sur des critères d'efficacité. Ici, les choix collectifs représentés par la fonction W font appel à des considérations éthiques et sociales.

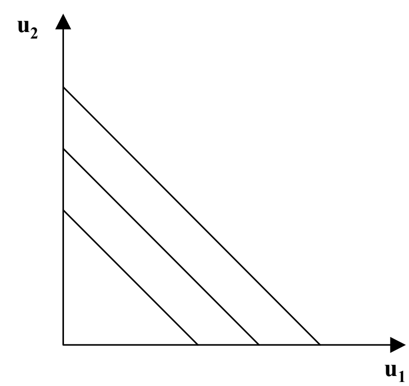
Exemples de fonction d'utilité sociale

1° fonction utilitarienne (**voir graphique 3-07a)**)

3-07 a)

$$W = \sum_{i=1}^{m} u_i$$

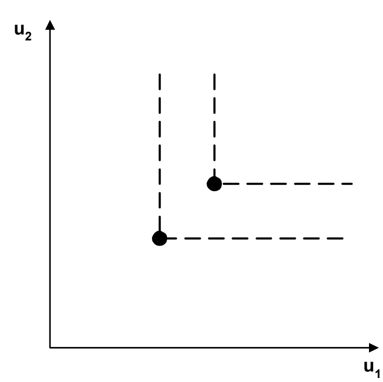
$$W = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$$



2° fonction de Rawls (**voir graphique 3-07b)**)

$W = \min(u_1, u_2, \dots, u_m)$

3-07



4.2 L'optimum et la fonction d'utilité sociale

Quelle condition doit satisfaire un optimum de Pareto pour être également un optimum par rapport à la fonction de bien-être social W ?

Pour répondre à cette questions, on doit chercher les valeurs des x_{ih}, y_{jh} qui maximisent W tout en tenant compte des contraintes

$f_j\ (y_j) \leq 0$ pour toutes les entreprises j = 1, 2, ... , n

$\sum_{i=1}^{m} x_{ih} = \sum_{i=1}^{n} y_{jh} + w_h$ pour tous les biens h = 1, 2, ... , ℓ

Ce problème revient à maximiser le Lagrangien suivant :

$$L = W\Big(u_1\big(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1\ell}\big), \ldots, u_m\big(x_{m1}, \ldots, x_{m\ell}\big)\Big) - \sum_j \mu_j f_j\big(y_{j1}, \ldots, y_{j\ell}\big) - \sum_{h=1}^{\ell} \pi_h \left[\sum_{i=1}^{m} x_{ih} - \sum_{j=1}^{n} y_{jh} - w_h\right]$$

où μ_j et π_h sont des multiplicateurs de Lagrange.

En dérivant par rapport aux x_{ih}, y_{jh}, on trouve les conditions :

1. $\frac{\partial L}{\partial x_{ih}} : \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_{ih}} - \pi_h = 0$ pour tout i, h

2. $\frac{\partial L}{\partial y_{jh}} : \mu_j \frac{\partial f_j}{\partial y_{jh}} - \pi_h = 0$ pour tout j, h

Les conditions (2) sont identiques à celles obtenues pour un optimum avec production. Après de légères transformations, elles nous indiquent que les TMT doivent être égaux pour tous les producteurs pour chaque couple de bien (r, s).

2'. $$\frac{\partial f_j / \partial y_{jr}}{\partial f_j / \partial y_{js}} = \frac{\pi_r}{\pi_s} \qquad \text{pour tout j, pour tout (r, s)}$$

Considérons les conditions (1). Le terme $\partial W/\partial u_i$ représente l'augmentation de l'utilité collective W suite à une augmentation d'une unité de u_i. C'est en quelque sorte le poids marginal de l'individu «i» dans la société. Ainsi, le produit $(\partial W/\partial u_i)\,(\partial u_i/\partial x_{ih})$ représente l'utilité marginale sociale du bien h. Les conditions (1) imposent que ce produit prenne la même valeur pour tous les individus, i.e.

$$\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_{ih}} = \pi_h \qquad \text{pour tout i, h}$$

Autrement dit, l'optimum social (ou optimum par rapport à la fonction de bien-être social) exige une distribution des biens entre les individus qui aboutisse à l'égalité de l'utilité marginale sociale de chaque bien pour tous les individus.

<u>Remarque</u>

Les conditions (1) et (2) permettent de retrouver les conditions qui caractérisent un optimum de Pareto. Les équations (1) peuvent s'écrire sous une autre forme :

1'. $$\frac{\partial u_i / \partial x_{ir}}{\partial u_i / \partial x_{is}} = \frac{\pi_r}{\pi_s} \qquad \text{pour tout i, pour tout (r, s)}$$

i.e. égalité des TMS. Enfin, les conditions (1') combinés avec les conditions (2') nous donnent :

3. $$\frac{\partial u_i / \partial x_{ir}}{\partial u_i / \partial x_{is}} = \frac{\pi_r}{\pi_s} = \frac{\partial f_j / \partial y_{jr}}{\partial f_j / \partial y_{js}} \qquad \text{(TMS = TMT)}$$

et ces conditions sont bien celles que doit satisfaire un état optimal au sens de Pareto. Par conséquent, <u>tout optimum social est un optimum de Pareto</u>.

L'inverse est-il vrai, i.e. un optimum de Pareto est-il toujours un optimum social ? Pour répondre à cela, on doit réaliser que pour être un optimum social, un optimum de Pareto doit satisfaire en plus la condition

4. $$\frac{\partial W}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_{ih}} = \pi_h \qquad \text{pour tout i, pour un bien h quelconque}$$

On peut vérifier facilement qu'un état qui satisfait les conditions (3) et (4), i.e. un état optimal au sens de Pareto pour lequel l'utilité marginale sociale d'un bien est la même pour tous les individus, satisfait nécessairement aux conditions (1) et (2), i.e. les conditions d'un optimum social.

En réalité, il se peut que certains états optimaux au sens de Pareto satisfassent cette condition (4) supplémentaire, alors que d'autres ne pourront le faire. De sorte que <u>tout optimum de Pareto n'est pas un optimum social</u>.

<u>Exemple d'un optimum social</u>

Soit deux consommateurs dont les fonctions d'utilité sont :

$u_1 = x_{11}x_{12}$ et $u_2 = x_{21}x_{22}$

Les ressources initiales sont $w_1 = 10$ et $w_2 = 20$

Soit la fonction d'utilité sociale de Rawls :

$$W(u_1, u_2) = \text{minimum } \{u_1, u_2\}.$$

On cherche à déterminer l'optimum social.

Il faut d'abord déterminer la frontière de bien-être. Nous savons qu'à l'optimum,

$$TMS_{1,2}^1 = TMS_{12}^2.$$

i.e. $x_{12}/x_{11} = x_{22}/x_{21}$

d'où : $x_{12}/x_{11} = x_{22}/x_{21} = (20-x_{12}) / (10-x_{11})$

$\Rightarrow \quad 10x_{12} = 20x_{11} \Rightarrow \quad x_{12} = 2x_{11}$

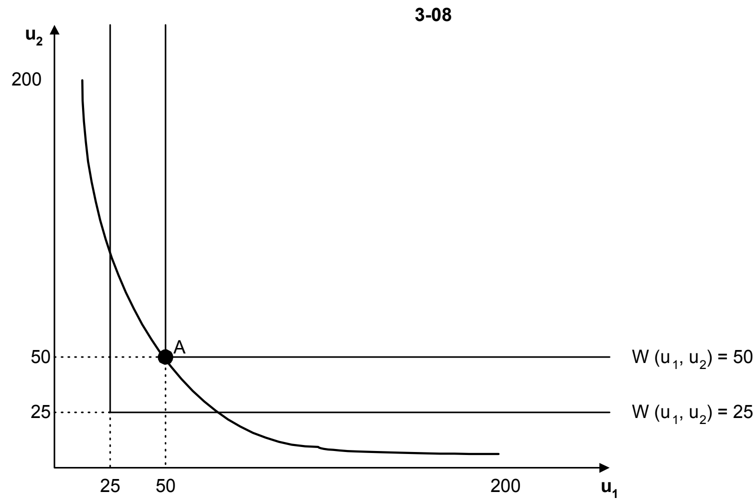
$$\begin{aligned} u_2 = x_{21}x_{22} &= (10-x_{11})(20-x_{12}) \\ &= 200 - 10x_{12} - 20x_{11} + x_{11}x_{12} \\ &= 200 - 10(2x_{11}) - 20x_{11} + x_{11}(2x_{11}) \\ &= 200 - 40x_{11} + 2x_{11}^2 \\ &= \left(10\sqrt{2} - \sqrt{2}x_{11}\right)^2 \end{aligned}$$

or, $u_1 = x_{11}x_{12} = x_{11}(2x_{11}) = 2x_{11}^2 \quad \Rightarrow \quad u_1^{½} = \sqrt{2}\, x_{11}$

et donc $u_2 = (10\sqrt{2} - u_1^{½})^2$

ce qui est l'expression de la frontière de bien-être.

(**voir graphique 3-08**)



Les courbes d'indifférence associées à la fonction d'utilité sociale de Rawls sont à angle droit selon l'axe $u_1 = u_2$.

L'utilité sociale sera maximisée à l'intersection des deux courbes la plus éloignée de l'origine, soit le point A.

En A, $u_1 = u_2$ Alors $u_2 = (10\sqrt{2} - u_1^{½})^2$

$\Rightarrow \quad u_2 = (10\sqrt{2} - u_2^{½})^2$

$\Rightarrow \quad u_2^{½} = 10\sqrt{2} - u_2^{½}$

$\Rightarrow \quad 2u_2^{½} = 10\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad u_2 = 50$

À l'optimum, on aura donc $u_1 = u_2 = 50$.

Nous pouvons déterminer les distributions optimales :

$u_1 = x_{11}x_{12} = 2x_{11}^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad x_{11} = 5$ et $x_{12} = 10$

$u_2 = x_{21}x_{22} = 2x_{21}^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad x_{21} = 5$ et $x_{22} = 10$

Est-il possible de trouver un vecteur de prix et des dotations initiales qui permettraient de décentraliser l'optimum social en un équilibre concurrentiel ?

1° Nous devons avoir $p_1/p_2 = 2$ (à l'équilibre, $TMS_{1,2} = p_1/p_2$).

Posons $p_2 = 1 \Rightarrow p_1 = 2$

2° Les revenus des consommateurs sont alors,

$R_1 = p_1x_{11} + p_2x_{12} = 2*5 + 10 = 20$

$R_2 = p_1x_{21} + p_2x_{22} = 2*5 + 10 = 20$

Il suffit maintenant de trouver des dotations initiales qui «vont» avec ces revenus, i.e.

$p_1w_{11} + p_2w_{12} = 20$ ou $2w_{11} + w_{12} = 20$

$p_1w_{21} + p_2w_{22} = 20$ ou $2w_{21} + w_{22} = 20$

et respectant la limitation des ressources, i.e.

$w_{11} + w_{21} = 10$ et $w_{12} + w_{22} = 20$

Si $w_{11} = 4$, on a $w_{12} = 20 - 8 = 12$

$w_{22} = 20 - 12 = 8$

et $w_{21} = 10 - 4 = 6$

Avec les prix $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ et les allocations initiales en ressources $w_{11} = 4$, $w_{12} = 12$, $w_{21} = 6$ et $w_{22} = 8$, quand chacun des consommateurs maximise son utilité, l'optimum social est atteint.

Pour le constater, il suffit de se rappeler que les fonctions de demande des consommateurs sont :

$x_{11} = R_1 / 2p_1$; $x_{12} = R_1 / 2p_2$; $x_{21} = R_2 / 2p_1$; $x_{22} = R_2 / 2p_2$

$R_1 = p_1w_{11} + p_2w_{12} = 2*4 + 1*12 = 20$

$R_2 = p_1w_{21} + p_2w_{22} = 2*6 + 1*8 = 20$

$\Rightarrow$ L'équilibre, $x_{11} = 20 / 2*2 = 5$; $x_{12} = 20 / 2*1 = 10$

$x_{21} = 20 / 2*2 = 5$; $x_{22} = 20 / 2*1 = 10$

ce qui correspond précisément à l'optimum social.

4.3 <u>La fonction de bien-être social et le calcul économique</u>

Malgré toutes les réserves que nous avons mentionnées concernant la fonction de bien-être social, cette dernière s'est avérée fort utile dans l'étude de certains problèmes. Elle est souvent considérée comme étant la base du calcul économique : l'exemple suivant cherche à illustrer que la fonction de bien-être social peut aider à analyser un problème sans qu'on ait à la spécifier.

Exemple

Supposons que l'on s'interroge sur l'opportunité d'ouvrir une nouvelle usine, disons d'aluminium. L'approche économique, en particulier celle du calcul économique, ne se limitera pas à s'interroger sur la rentabilité d'un tel projet (approche strictement comptable). Avant de prendre une telle décision, d'après le point de vue du calcul économique, on va plutôt se demander quels sont les effets d'un tel projet sur l'ensemble de la société, sur l'ensemble des consommateurs. Idéalement, si le gouvernement nous fournissait la fonction de bien-être social et l'entreprise sa fonction de production, il serait assez facile d'évaluer le projet. Il suffirait de considérer la consommation résultante et de vérifier si elle correspond à un optimum par rapport à la fonction d'utilité collective. En pratique, on ne pourra pas procéder de cette façon car ni le gouvernement ni l'entreprise ne nous fourniront les informations nécessaires. Que faire alors ? Un grand pas est fait pour répondre à cette question lorsqu'on réalise que ce qui nous intéresse vraiment, dans ce cas-ci, ce n'est pas tellement de connaître la fonction de bien-être social W et de l'évaluer, mais de voir si entre les deux situations (situation 2 - le projet est réalisé et situation 1 - le projet ne l'est pas), on peut observer un changement au niveau du bien-être social tel que $\Delta W = W^2 - W^1 > 0$.

En adoptant cette approche du calcul économique, nous allons voir que nous n'avons plus besoin de spécifier la fonction W. Il suffit d'admettre qu'une telle fonction existe, permettant de comparer des projets.

1° Puisque l'on s'intéresse à $\Delta W = W^2 - W^1$, on approximera ΔW par la différentielle de W :

$$(5) \quad \Delta W \cong dW = (\partial W/\partial u_1)du_1 + (\partial W/\partial u_2)du_2 + \ldots + (\partial W/\partial u_m)du_m$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} du_i$$

$$dW = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i du_i$$

où $\alpha_i = \partial W/\partial u_i$ est le «poids marginal» du consommateur i.

2° En supposant une économie où chaque consommateur i maximise son utilité par rapport au même système de prix p, on aura :

(6) $\partial u_i / \partial x_{ih} = \lambda_i p_h$ $\forall_i, \forall_h$ (conditions d'équilibre du consommateur)

De plus, un changement dans le vecteur de consommation de chaque individu i entraînera un changement dans son niveau d'utilité que l'on peut approximer par

$$\Delta u_i \cong du_i = (\partial u_i/\partial u_{i1})dx_{i1} + (\partial u_i/\partial x_{i2})dx_{i2} + ... + (\partial u_i/\partial x_{i\ell})dx_{i\ell}$$

(7) $$du_i = \sum_{h=1}^{\ell} \frac{\partial u_i}{\partial x_{ih}} dx_{ih}$$

En combinant (6) et (7), le changement dans le niveau d'utilité du consommateur i peut se mesurer par :

$$du_i = \sum_{h=1}^{\ell} \lambda_i p_h dx_{ih}$$

(8) $du_i = \lambda_i p' dx_i$

où λ_i est l'utilité marginale du revenu du consommateur i et pdx_i une variation de son revenu réel.

3° En substituant (8) dans (5), tout changement dans l'économie caractérisé par $du_i = \lambda_i p' dx$ ($\forall_i$), peut être évalué du point de vue social :

(9) $$dW = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda_i p' dx_i$$

Ainsi, la variation dans l'utilité sociale se ramène à une somme pondérée des variations des revenus réels des consommateurs.

Enfin, en supposant que l'utilité marginale sociale du revenu est la même pour tous, i.e.

$$\lambda_i \alpha_i = \theta \qquad \forall_i ,$$

l'équation (9) peut se réécrire

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{i=1}^{m} \theta p' dx_1 \\ &= \theta \sum_{i=1}^{m} p' dx_i \end{aligned}$$

et $\dfrac{dW}{\theta} = \sum_{i=1}^{m} p' dx_i = p' dx$. Si on note dW/θ par $d\widetilde{W}$, on aura :

$$d\widetilde{W} = p'dx$$

La désirabilité sociale d'un projet, ou de tout changement dans l'économie, peut être évaluée par le changement provoqué dans le revenu réel de la communauté p'dx.

Le calcul économique nous fournit donc une façon simple pour évaluer la désirabilité sociale d'un projet.